УСРС 2

*Задания к лабораторной работе смотрите на последней странице .*

Дополнительный материал для разъяснения содержания моделирования (сглаживания) временного ряда методом сингулярного спектрального анализа (метод ССА) (этот метод известен как метод «гусеница».

Тема 7, п.п. 7.3 (электронный конспект лекций по МСА)

Метод разработан российскими учеными-физиками, чьи работы относятся к таким разделам прикладной физики, как астрофизика и геофизика. Этот метод находит применение в метеорологии, океанологии и т.д. Он особенно эффективен в сглаживании «длинных» временных рядов. Такие ряды формируются в перечисленных выше областях, а также в исследовании динамики финансовых активов (курсовая стоимость акций, различные фондовые индексы, валютные курсы и др.).

Например, «длинные» временные ряды характерны для ряда ключевых индикаторов в геологии, метеорологии, астрофизике, где число элементов ряда составляет не менее . Известны такие фондовые индексы, как индекс Доу Джонса (он используется в США с 1886 г.), индекс NYSE Composite (CША с 1918 г.), индекс FT (с 1950-х годов), современное название FTSE (Financial Times Stock Exchange Index – индекс Лондонской фондовой биржи).

Если провести нестрогие расчеты исходя из того, что в одной неделе 4-5 рабочих дня биржевой торговли), то за год – 200 дней. Для каждого рабочего дня за период 1950-2019 гг. длина ряда, например, по индексу FT составит 70\*200 = 14 000. Другой пример, евро в безналичном расчете с 1 января 1999 г. Котировки курса евро/доллар проводятся ежедневно, т.е. за год 365 усредненных курсов, за 21 год, 21\*365=7665, что и будет длиной ряда курсового соотношения евро/доллар.

Временные ряды, которые без глубокого исследования демонстрируют отсутствие детерминированной составляющей (тренд – долговременная тенденция, кратковременные сезонные колебания, долговременные циклические колебания) и по внешним признакам подвержены влиянию исключительно случайных флуктуации, изучаются методами нелинейного динамического анализа. Если в поведении (колебаниях) временного ряда подозревается наличие «скрытой» цикличности, среди других методов используется метод ССА. Такие ряды называются квазипериодическими.

Суть метода ССА заключается в получении из исходного хаотического, беспорядочного ряда, ряда . Он обладает свойствами, которые позволяют с высокой точностью прогнозировать исходный ряд. ССА, по существу, основан на преобразованиях исходного ряда в соответствии с алгоритмом главных компонент (ГК). Важным звеном в использовании ССА является проверка гипотезы о присутствии скрытого цикла и, если это подтверждается, установление продолжительности цикла (размерности вложения – на языке физики). Продолжительность цикла (в дальнейшем будем обозначать символом) служит основанием для формирования локальных рядов с длиной, причем каждый последующий ряд от предыдущего отличается единственным (например, первым) элементом от предыдущего. Другими словами, каждый последующий локальный ряд скользить на один шаг в период, своего рода скольжение маленькими «шажочками» гусеницы, откуда и название метода «гусеницы». Каждый локальный временной ряд с длиной расписывается по столбцам и получится матрица размерностиЗдесь-длина исходного «большого» ряда.

Итак, для рядаТ.е. продолжительность скрытого цикла не может быть больше целой части числа.

Для удобства рассмотрим пример.

  
Переход к новому, сглаженному, ряду осуществляется в приведенной ниже последовательности.

1. Рассчитывается матрица.
2. Устанавливаются собственные значения и соответствующие им собственные векторы (удобно сразу брать нормированные к единице векторы).

***Важное примечание.*** В практических расчетах удобно использовать не саму матрицу, а матрицу коэффициентов парных корреляций для матрицы (или таблицы) (**попробуйте доказать!**). Имеются в виду коэффициенты парных корреляций между столбцами матрицы. Такой подход не меняет суть метода, существенно снижает порядок (масштабность, величину) собственных чисел.

1. Формируется матрица нормированных собственных векторов 
2. При этом матрица ГК имеет вид.
3. Рассчитывается новая матрица по формуле



Из матрицы берутся только первые столбцов, которые указывают на наиболее информативные главные компоненты (как было вам показано, критерием сохранения малого количества собственных векторов могут послужить собственные значения корреляционной матрицы, для которых 

1. По элементам матрицы осуществляется восстановление исходного ряда в новых (сглаженных) значениях в виде ряда, элементы которого рассчитываются по формулам:

 

***Задание.***

На примере ряда проверьте как рассчитываются члены нового ряда по приведенным выше формулам используя матрицу



В таблице 1 приведен фрагмент динамики данных фондового индекса FT Великобритании в период 1960-1971 с квартальным временным тактом.

Таблица 1. Индекс FT курса обыкновенных акций ведущих компаний: квартальные средние за 1960-1971 гг.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Год и квартал | Индекс | Год и квартал | Индекс | Год и квартал | Индекс |
| 1960 1  2  3  4 | 323,8 | 1964 1 | 335,1 | 1968 1  2  3  4 | 409,1 |
| 314,1 | 2  3  4 | 344,4 | 461,1 |
| 321 | 360,9 | 491,4 |
| 312,9 | 346,5 | 490,5 |
| 1961 1  2  3  4 | 323,7 | 1965 1  2  3  4 | 340,6 | 1969 1  2  3  4 | 491 |
| 349,3 | 340,3 | 433 |
| 310,4 | 323,3 | 378 |
| 295,8 | 345,6 | 382,6 |
| 1962 1  2  3  4 | 301,2 | 1966 1  2  3  4 | 349,3 | 1970 1  2  3  4 | 403,4 |
| 285,8 | 359,7 | 354,7 |
| 271,7 | 320 | 343 |
| 283,6 | 299,9 | 345,4 |
| 1963 1  2  3  4 | 295,7 | 1967 1  2  3  4 | 318,5 | 1971 1  2  3  4 | 330,4 |
| 309,3 | 343,1 | 372,8 |
| 295,7 | 360,8 | 409,2 |
| 342 | 397,8 | 427,6 |

На рис. 1 показана динамика изменения индекса FT

Рисунок 1 – Динамика индекса FT

Приведенный на рис. 1 ряд является хаотическим с подозрением на квазипериодичность (присутствие скрытого цикла). Исследования показали, что для этого ряда продолжительность скрытого цикла составила 16 кварталов или 4 года. Существование такого цикла объясняется (или объяснялось на тот период) парламентскими выборами в Великобритании, которые проводились (проводятся) раз в 4 года.

***Внимание.*** Эту таблицу будем использовать в качестве исходного материала для выполнения лабораторной работы по п.п. ССА.

Лабораторная работа ССА

Для всех представленных ниже вариантов лабораторного задания будет использоваться один временной ряд. Это ряд индекса FT с длиной 48 кварталов, т.е. продолжительность одного временного такта составляет 1 квартал. Ряд формируется по данным таблицы 1 (см. предыдущую страницу). Распределение вариантов осуществляется по заданной продолжительности скрытого цикла (размерности реконструкции), что будет равносильно величине в алгоритме реализации метода ССА.

В 1 В 2 В 3

  

Варианты распределяются по списку, каждые шесть студентов (начиная с первого из списка) выбирают соответствующий вариант.

Итак, требуется:

1. Сгладит исходный ряд с помощью нового ряда, полученного методом ССА или (то же самое) получить новый ряд методом ССА.

2. Смоделируйте исходный ряд с помощью ARIMA.

3. Отобразите графически в одной системе координат исходный ряд и полученные с помощью ССА и ARIMA ряды. Установить и сравнить дисперсии: а) величин поэлементных отклонений исходного рядя от ряда, полученного методом ССА; б) величин поэлементных отклонений исходного рядя от ряда, полученного с помощью модели ARIMA.

4. Провести прогноз показателя индекса FT на 49-й, 50-й и 51-й кварталы по формуле, расположенной на 141 стр. статьи Г.О. Читая, А.Е. Тарасюк (статья из периодического издания «Белорусский экономический журнал»). Статья в формате PDF отправлена на электронную почту группы 18 ДКК. *Примечание к п. 4.* В этой формуле символ (читается «Тау») соответствует продолжительности задаваемого по вариантам скрытого цикла.